Ασκηση: (H-W)

Να κατασκευαστεί το $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, (p,q)=1 \}$ από το $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ με σχέση:

$(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

(Στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας θα οριστεί πράξη πρόσθεσης και πολ/μου, συμβατές με τις γνωστές πράξεις στο $\mathbb{Q}$ που κληρονομούνται από το $\mathbb{Z}$).

Παράδειγμα:

Να βρεθούν τα a και b ώστε η πράξη $\square : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $x \square y = ax + by$ είναι προσεταιριστική

ΛΥΣΗ

Θέλουμε $(x \square y) \square z = x \square (y \square z)$

$$\left.\begin{aligned} (x \square y) \square z &= (ax+by) \square z = a(ax+by) + bz \\ x \square (x \square y) &= x \square (ay+bz) = ax + b(ay+bz) \end{aligned}\right| \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

Θέλουμε δηλαδή:

$a^2 x + \cancel{aby} + bz = ax + \cancel{aby} + b^2 z \Rightarrow a^2 = a$ και $b^2 = b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 0, 1$ ή $b = 0, 1$

$(a,b) \longleftrightarrow (0,0) \longrightarrow x \square y = 0$

$(a,b) \longleftrightarrow (1,0) \rightarrow x \square y = x$
$(a,b) \longleftrightarrow (0,1) \rightarrow x \square y = y$
$(a,b) \longleftrightarrow (1,1) \rightarrow x \square y = x+y$

σώμα

$M(n \times n, \mathbb{R}) = \{ n\times n$ πίνακες με πραγματικά στοιχεία$\}$
Με την πρόσθεση είναι αβελιανή ομάδα
Με τον πολ/μο προσοχή $AB \neq BA$ (όχι αβελιανή)
" " " είναι μονοειδές
" " " όχι πάντα αντιστρέψιμος (εξαρτάται από τη βαθμίδα του πίνακα). $GL(n, \mathbb{R})$ αντιστρέψιμοι $n\times n$ πίνακες θα είναι ομάδα.

πχ

Έστω $A = \{a, b, \gamma, \delta\}$ ορίζεται πράξη στο A ως εξής
$(x,y) \longmapsto x \square y = ;$

$\square$	a	b	γ	δ
a	a	γ	b	δ
b	γ	a	δ	b
γ	b	δ	a	γ
δ	δ	b	γ	a

Έχουμε $a \square b = b \square a$, $\forall a, b$
Εφόσον ο πίνακας συμμετρικός
Δεν έχει ουδέτερο στοιχείο

πχ

$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{(n-1)}\}$ έχει δύο πράξεις
$\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b}$, αβελιανή ομάδα
$\bar{a} \odot \bar{b} = \overline{ab}$
Αν n πρώτος $\mathbb{Z}_n^*$ αβελιανή ομάδα
Αν n σύνθετος (πχ $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ το $\bar{2}$ δεν έχει αντίστροφο. (Δηλ. $\nexists \bar{b} \in \mathbb{Z}_4^*$ με $\bar{2} \odot \bar{b} = \bar{1}$)

Σελίδα 17 Ασκ. 1, 2, 3, 4.

Σελ 17) Ασκηση 6) $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ με πράξη $(a,b)*(\gamma,\delta) = (a\gamma, a\delta + b)$ είναι ομάδα

Η $*$ είναι καλά ορισμένη γιατί $a\gamma$ και $a\delta + b \in \mathbb{R}$ και $a\gamma \neq 0$ γιατί $a, \gamma \neq 0$

Προσεταιριστική:

- $[(a,b)*(\gamma,\delta)]*(\varepsilon,\zeta) = (a\gamma, a\delta+b)*(\varepsilon,\zeta) = (a\gamma\varepsilon, a\gamma\zeta + a\delta + b)$ και
- $(a,b)*[(\gamma,\delta)*(\varepsilon,\zeta)] = (a,b)*(\gamma\varepsilon, \gamma\zeta+\delta) = (a\gamma\varepsilon, a\gamma\zeta + a\delta + b)$ ίσα.

ουδέτερο στοιχείο:

$(\varepsilon,\varepsilon') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ώστε

$(a,b)*(\varepsilon,\varepsilon') = (a,b) = (\varepsilon,\varepsilon')*(a,b)$

αλλα, $(a,b)*(\varepsilon,\varepsilon') = (a\varepsilon, a\varepsilon'+b) = (a,b) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\varepsilon = a \Rightarrow \varepsilon = 1 \\ a\varepsilon' + b = b \Rightarrow \varepsilon' = 0 \end{cases}$$

Αντίθετο στοιχείο:

$\forall (a,b)$ θέλουμε (γ,δ) ώστε

$(a,b)*(\gamma,\delta) = (1,0) = (\gamma,\delta)*(a,b)$

αλλα: $(a\gamma, a\delta+b) = (1,0) \Rightarrow a\gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = a^{-1}$, $a\delta + b = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \delta = -\frac{b}{a}$

Παράδειγμα: $A = \{a, b\}$ ορίστε πράξεις στο A ωστε να είναι ομάδα.

	a	b
a	a	b
b	b	a ή b

Θέλουμε ουδέτερο δυο περιπτώσεις a ή b

αλλά $b*b = b$ δεν θα είχαμε αντίστροφο για το b

Αρα, $b*b = a$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ

- Εστω $(O, *)$ ομάδα:

$a*b = b*a \quad \forall a,b \Leftrightarrow$ Αβελιανή

τοτε:

$(a*b)^{-1} = a^{-1}*b^{-1}$

$(a*b)*(a*b)^{-1} = e$ ουδέτερο

και $(a*b)*(a^{-1}*b^{-1}) = (a*(b*a^{-1})*b^{-1})$ ①

Αν ήταν και αβελιανή οπως ειπώθηκε παραπάνω

τοτε $a^{-1}*b = b*a^{-1}$ και άρα

$e = e*e = (a*a^{-1})*(b*b^{-1}) = a*(a^{-1}*b)*b^{-1}$ ②

Αρα, ① = ②

Πάμε νδο ισχύει το ανάποδο:

$((a*b)^{-1})^{-1} = (a^{-1}*b^{-1})^{-1} \Rightarrow a*b = (b^{-1})^{-1}*(a^{-1})^{-1} = b*a$

Αρα, δ.ο $a*b = b*a \Leftrightarrow (a*b)^{-1} = a^{-1}*b^{-1}$

- Μπορούμε νδο $a*b = b*a \Leftrightarrow (a*b)^2 = a^2*b^2$

Εστω $(a*b)\cdot(a*b) = (a*b)^2 = a*(b*a)*b \overset{(\alpha\beta\varepsilon\lambda)}{=}$

$= a*(a*b)*b = (a*a)*(b*b) = a^2*b^2$

Ανάποδα

$(a*b)^2 = a^2*b^2 \Leftrightarrow (a*b)*(a*b) = a^2*b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^{-1}*(a*b)*(a*b) = a^{-1}*(a^2*b^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a^{-1}*a)*b*(a*b) = (a^{-1}*a)*a*b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e*b*(a*b) = e*a*b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b*a)*b = (a*b)*b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b*a)*b*b^{-1} = (a*b)*b*b^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b*a = a*b$

- Αν $a^2 = e \Rightarrow O$: αβελιανή $\forall a \in O$

$a^2 = e \Leftrightarrow a^2*a^{-1} = b*a^{-1} \Leftrightarrow a*a*a^{-1} = a^{-1} \Leftrightarrow a = a^{-1}$

πχ → $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ $\quad \bar{0}*\bar{0} = \bar{0}$ και $\bar{1}\oplus\bar{1} = \bar{2} = \bar{0}$

Για το αντίστροφο β' τρόπος $a = a^{-1} \Rightarrow a*b = (a*b)^{-1} = b*a$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $(O,*)$ είναι ημιομάδα πεπερασμένου πλήθους στοιχείων ώστε να ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής δεξιά και αριστερά. Τότε το $(O,*)$ θα αποτελεί ομάδα

ΛΥΣΗ

Έστω $O=\{a_1,\dots,a_k\}$ εφοδιασμένο με την πράξη $*: O\times O \to O$. Η πράξη είναι προσεταιριστική

Ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma * a = \gamma * b \Rightarrow a=b \\ a*\gamma = b*\gamma \Rightarrow a=b \end{array}\right| \forall a,b,\gamma \in O$$

Θέλουμε (1) μοναδιαίο ουδέτερο e

(2) $(\forall a \in O)(\exists b)$ με $a*b = b*a = e$

Ερώτηση: Αν πολλ/σεις το O με το a_1, θα πάρεις πάλι το O;

$a_1 O = \{a_1*a_1, \dots, a_1*a_k\} \subseteq O$ καλά ορισμένη

Πότε $|a_1*O| < |O|$;; $\quad | \; |$: πλήθος

$a_1*a_i = a_1*a_j \xRightarrow{\text{διαγρ.}} a_i = a_j$

Άρα $a_1*O = O$

$\{a_1,a_2,\dots,a_k\} \to \{a_1*a_1,\dots,a_1*a_k\}$

$\exists\, i_0$ ώστε $a_1 = a_1 a_{i_0}$ και θδο

$a_{i_0} = e \Leftrightarrow a_j * a_{i_0} = a_j = a_{i_0} * a_j$

$a_1*a_1 = a_1*a_{i_0}*a_1 \Rightarrow a_1 = a_{i_0}*a_1$

$a_{i_0}*O = \{a_{i_0}*a_1,\dots,a_{i_0}*a_k\} = \{a_1,\dots,a_k\}$

Έστω ότι $a_{i_0}*a_t = a_j$ (Θέλαμε $a_t = a_j$ ώστε $a_{i_0} = e$)

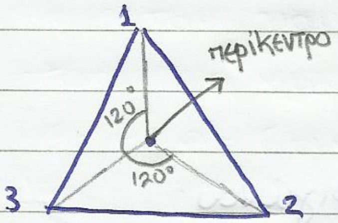
$a_1*a_{i_0}*a_t = a_1*a_j \Rightarrow a_1*a_t = a_1*a_j \Leftrightarrow a_t = a_j$

$a_t*O = \{a_t*a_1,\dots,a_t*a_k\} \overset{\text{κο}}{=} O \Rightarrow$

∃ j ώστε: $a_i * a_j = e$. Άρα ομάδα

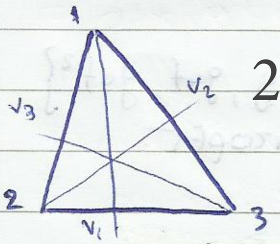
(H-W) Άσκηση: Έστω $(O,*)$ ημιομάδα. Αν $(\forall a,b \in O)(\exists \gamma,\delta)$: $a*\gamma = b$ και $\delta * a = b$ τότε το $(O,*)$ ομάδα

Συμμετρίες Ισόπλευρου Τριγώνου



Συμμετρία = Απεικόνιση του $(1,2,3)$ στο $(1,2,3)$

1) Ταυτοτική: Στροφή R κατά 120°: $(1,2,3) \to (2,3,1)$, R
Ξανά Στροφή R κατά 120° και άρα συνολική στροφή 240°: $(1,2,3) \to (3,1,2)$, R^2
Ξανά Στροφή R κατά 120° και άρα συνολική στροφή 360°: $(1,2,3) \to (1,2,3)$, $R^3 = 1$



2) Άξονας συμμετρίας από την 1
V_1 $(1,2,3) \to (1,3,2)$, $V_1 \circ V_1 = V_1^2 = 1$
V_2 $(1,2,3) \to (3,2,1)$ $V_2 \circ V_2 = V_2^2 = 1$
V_3 $(1,2,3) \to (2,1,3)$ $V_3 \circ V_3 = V_3^2 = 1$

Επομένως {οι συμμετρίες του ισοπλεύρου} =
$= \{1, R, R^2, V_1, V_2, V_3\}$

Παρατηρούμε ότι: $V_1 \circ R : (1,2,3) \to (3,2,1) = V_2$
αφού $V_1 : (1,2,3) \to (1,3,2)$
$R_1 : (1,2,3) \to (2,3,1)$

Επίσης, βλέπουμε $R \circ V_1 : (1,2,3) \to (2,1,3)$
αφού $V_1 : (1,2,3) \to (1,3,2)$
$R : (1,2,3) \to (2,3,1)$

Άρα, $V_1 \circ R \neq R \circ V_1$ όχι αντιμεταθετική
προσεταιριστική γιατί είναι σύνθεση απεικονίσεων

$\circ$	1	R	R^2	V_1	V_2	V_3
1	1	R	R^2	V_1	V_2	V_3
R	R	R^2	1	V_3	V_1	V_2
R^2	R^2	1	R	V_2	V_3	V_1
V_1	V_1	V_2	V_3	1	R	R^2
V_2						
V_3						

$$V_1 \circ V_2 = \left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}\right) R$$

Να συμπληρωθούν (εργασία)

Δηλαδή όλες οι συμμετρίες ισοπλεύρου τριγώνου δημιουργούνται με τη σύνθεση στροφής και συγκεκριμένης συμμετρίας

Σ_n = συμμετρική ομάδα σε n στοιχεία με τη σύνθεση $= \{f : \{1,2,\dots,n\} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \{1,2,\dots,n\}\}$

Άρα για το ισόπλευρο μας:

$\Sigma_3 = \{f : \{1,2,3\} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \{1,2,3\}\} = \{1, f, f^2, g, g\circ f, g\circ f^2\}$

όχι αβελιανή ομάδα. με f, g: γεννήτορες ώστε $f^3 = 1$ και $g^2 = 1$